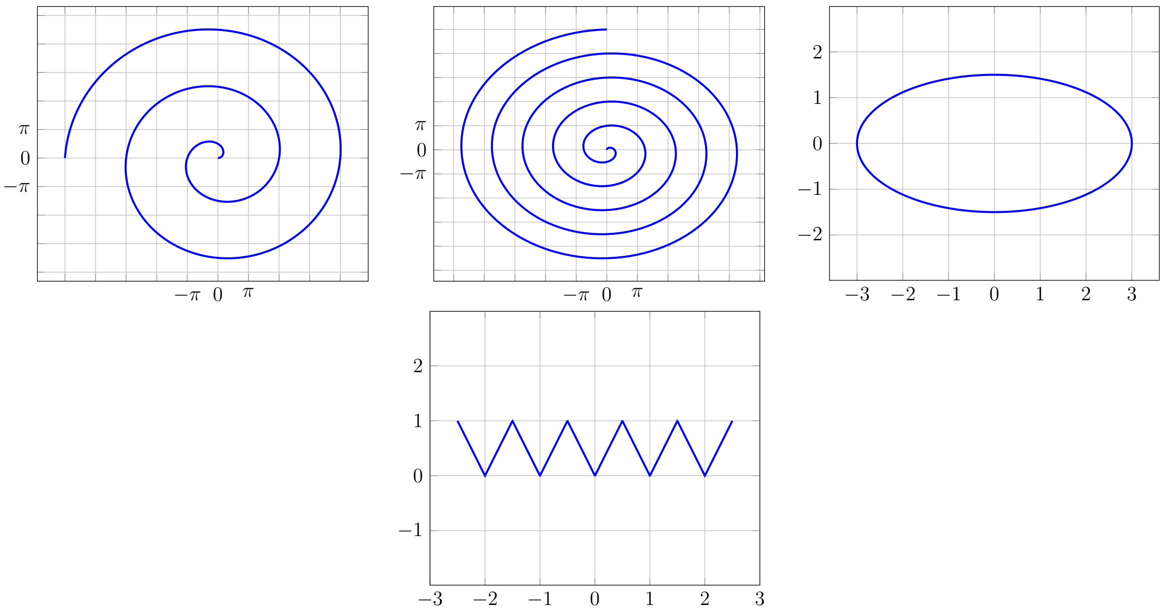
Étude de courbes paramétrées et calculs de longueurs

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Tracer des courbes paramétrées simples

Exercice 1. Déterminer une paramétrisation des courbes suivantes



Exercice 2. Déterminer une paramétrisation de la droite Δ' projettée orthogonale de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan P d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 3. Tracer, puis déterminer une paramétrisation (en coordonnées cartésiennes) des courbes du plan décrites en coordonnées polaires par

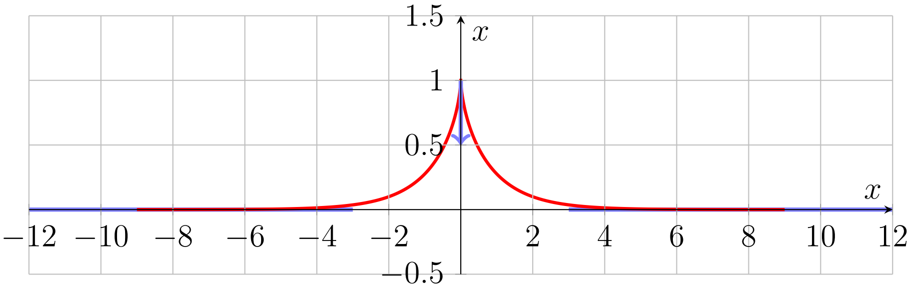
1. $r = \frac{1}{2\cos(\theta)+3\sin(\theta)}$,
2. $r = 4\cos(\theta)$.

2 Étude de courbes paramétrées

Exercice 4. Soit la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, \phi)$ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?

2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2(1-2\sinh^2 t)/\cosh^4 t \\ (5\tanh t - 6\tanh^3 t)/\cosh t \end{pmatrix}$) et déterminer si Γ à un/des point(s) stationnaire(s).
3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\phi(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).
4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position relative).
5. Faire le tableau de variations de Γ.
6. Tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.

center 

Exercice 5. (La deltoïde) Soit la courbe paramétrée Γ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ?
2. Calculer ϕ', ϕ'' et ϕ'''.
3. Soit $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que $\cos(t) - \cos(2t) = 0$ a trois solutions $t = 0$ et $t = 2\pi/3$ et $t = -2\pi/3$.
4. Calculer la position des points stationnaires. Donner leur nature ainsi que le comportement local de la courbe en leur voisinage (faire un petit dessin à chaque fois).
5. Calculer les tangentes aux points stationnaires et montrer qu'elles s'intersectent toutes en un même et unique point.
6. Faire le tableau de variations associé à ϕ.
7. La courbe $\Gamma = ([-\pi, \pi[, \phi)$ est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne ?
8. Montrer que la longueur de Γ est 16.

Exercice 6.* On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; i, j)$. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note Γ la courbe paramétrée $\phi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi_\alpha(t) = (1 + \alpha\cos t, \tan t + \alpha \sin t)$$

1. Étude des points stationnaires :
   (a) Dans le cas $\alpha = 1$, étudier les points stationnaires éventuels de la courbe Γ et, pour chacun, donner (en justifiant les calculs) sa nature et l'allure locale de Γ au voisinage.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas de point stationnaire pour $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Tangentes : discuter, suivant α, le nombre (et la position) des points de Γ admettant une tangente horizontale ou verticale.
3. Un cas particulier : Dans le cas où $\alpha = 8$, étudier la courbe Γ (symétries, variations, étude asymptotique, représentation graphique. . .).
4. Donner l'allure de Γ dans les cas où $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

3 Calculer des longueurs

Exercice 7. Tracer le support et calculer la longueur L des courbes Γ dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'*astroïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} a$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.

2.* Γ est l'*arche de cycloïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} R$, où $t \in [0, 2\pi]$ et $R > 0$ donné.

3. Γ est la *cardioïde* d'équation polaire $t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1 + \cos t) \\ t \end{pmatrix}$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.